

# 過渡的大変位における非線形振動感度解析

## Non-Linear Vibration Sensitivity Analysis in case of Transient Large Deformation

精密工学専攻 27 号 高野 優祐

Yusuke Takano

### 1. 緒言

以前から機械の振動低減手法の一つとして、振動モードを用いた感度や周波数応答関数(以降、FRF)感度などの感度解析を用いて構造最適化が行われてきた<sup>(1)(2)</sup>。しかし、これらの感度解析は周波数領域の問題で、時間領域の特定の時刻において実際にどの設計パラメータが振動低減に最適であるかが不明確である。

また、自動車のサスペンションなどの構造物は段差乗り上げ時などに構造自体が大変形する。それにより、剛性や減衰といった構造パラメータが変化し、感度解析結果に影響を与える恐れがある。

本研究では、時間領域で非定常振動の感度解析を行う新たな手法を提案し、大変位を再現した実験で構造変更を行い、時間軸感度の検証を行う。時間軸解法の一つである Newmark 法を質量で偏微分することによって時間軸の質量感度を算出し、大変位によって生じる剛性や減衰を時々刻々変化させることにより、最適な構造変更箇所を特定する。

### 2. 大変位による非線形性の確認

自動車が大きな段差を乗り越える動作の中で、サスペンションは Fig.1 のように大きく形を変える。本研究では、サスペンションの姿勢が変化する際に FRF がどのように変化するか把握する。

#### 2.1 実験条件

対象物は Fig.1 のようなタイヤ付きのサスペンションを使用する。Fig.1 の姿勢を Position 1 とし、そこから 25 mm ずつ上昇させていき、Position 1 から 100 mm 上がった Position 5 までの FRF をハンマリング試験によって計測する。

#### 2.2 実験結果

各姿勢における FRF の比較を Fig.2 に示す。これより、サスペンションの姿勢が上昇していくにつれ、一次、二次の固有振動数の低下や、振幅の変化が確認できる。したがって、段差乗り上げ時にサスペンションの剛性や減衰が変化していることが確認できた。

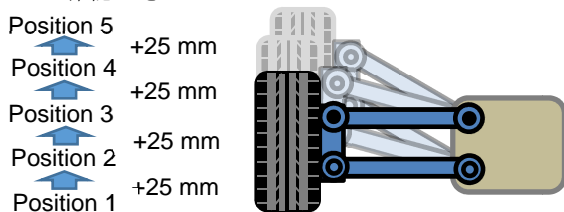


Fig.1 Suspension position varying

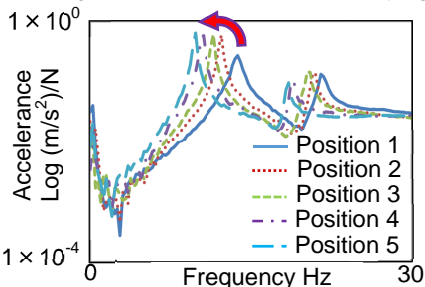


Fig.2 Comparison of FRF in each position

### 3. 計算モデルによる時間軸感度解析

#### 3.1 剛性、減衰の変化を考慮した時間変動応答の感度解析

時間領域での応答信号の計算手法として式(1)のような Newmark-beta method<sup>(3)</sup>(以下 Newmark 法)が広く知られている。Newmark 法の計算には質量行列[M]、剛性行列[K]、減衰行列[C]および求めたい時間と同じ次元の入力ベクトル{F}を使用する。

$$\{x_{i+1}\} = \left[ \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} [M] + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} [C] + [K] \right]^{-1} \times \left\{ \{F_{i+1}\} + [M] \left( \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \{x_i\} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \{\dot{x}_i\} + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \{\ddot{x}_i\} \right) + [C] \left( \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \{x_i\} + \left( \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \{\dot{x}_i\} + \left( \frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{x}_i\} \right) \right\} \quad (1)$$

ここで  $\{x_i\}$  は時刻  $i$  における変位、 $\alpha$ 、 $\beta$  は定数項、 $\Delta t$  は時間分解能を示す。

本研究ではこの式を質量で偏微分したものを感度とし、Newmark 法と同様に解き進めることで各時刻での感度を算出する。以下に式(1)を設計変数  $\gamma$  で偏微分した式(2)を示す。

$$\frac{\partial \{x_{i+1}\}}{\partial \gamma} = \left[ \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} [M] + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} [C] + [K] \right]^{-1} \times \left\{ \frac{\partial \{F_{i+1}\}}{\partial \gamma} + [M] \left( \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \frac{\partial \{x_i\}}{\partial \gamma} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \frac{\partial \{\dot{x}_i\}}{\partial \gamma} + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \frac{\partial \{\ddot{x}_i\}}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial [M]}{\partial \gamma} \left( \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \{x_i\} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \{\dot{x}_i\} + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \{\ddot{x}_i\} \right) + [C] \left( \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \frac{\partial \{x_i\}}{\partial \gamma} + \left( \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \frac{\partial \{\dot{x}_i\}}{\partial \gamma} + \left( \frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \{\ddot{x}_i\}}{\partial \gamma} \right) + \frac{\partial [C]}{\partial \gamma} \left( \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \{x_i\} + \left( \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \{\dot{x}_i\} + \left( \frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{x}_i\} \right) - \left( \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \frac{\partial [M]}{\partial \gamma} + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \frac{\partial [C]}{\partial \gamma} + \frac{\partial [K]}{\partial \gamma} \right) \{x_{i+1}\} \right\} \quad (2)$$

2章で剛性と減衰が変位に依存することから変位-剛性・減衰曲線を導出し、変位に応じた剛性と減衰を導出しながら式(2)を用い、質量に対する変位感度を算出する。

本研究では二自由度ばねマスモデルを使用して理論の検証を行う。まず、大変位挙動において剛性と減衰が一定の下で解析を行い、時間軸感度解析の妥当性の検証を行う。次に、導出した変位-剛性・減衰曲線から変位に応じて剛性と減衰を変化させ感度解析を行い、疑似的に大変位によって起こる振動特性の変化を再現する。最後に、剛性・減衰が一定の条件で解析を行った場合との比較を行う。

#### 3.2 二自由度計算モデルを用いた時間軸感度解析の検証

##### 3.2.1 解析条件

使用する計算モデルを Fig.3 に示す。入力点は  $m_2$ 、応答の計算点は  $m_1$  とする。Table 1 に質量、剛性、減衰の各物性値を示す。入力是一次の固有振動数 3.11 Hz よりも低い、1 Hz のハーフサイン波を使用する (Fig.4)。なお、 $\Delta t$  は  $2.27 \times 10^{-4}$  s とし、計算は入力継続時間と同じ 5 s 間で行う。

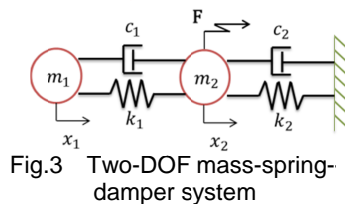


Fig.3 Two-DOF mass-spring-damper system

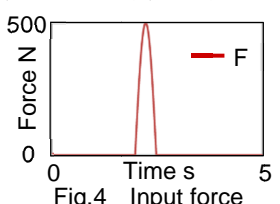


Fig.4 Input force

Table 1 Values of structural parameter

Mass Number	Mass Value [kg]	Spring Number	Stiffness Value [N/m]	Damping Number	Damping Value [N/(m/s)]
$m_1$	1	$k_1$	$1 \times 10^3$	$c_1$	5
$m_2$	1	$k_2$	$1 \times 10^3$	$c_2$	5

### 3.2.2 解析結果

Newmark 法によって計算された  $m_1$  の変位応答波形を Fig. 5 のデフォルト (Def) に示す。また、変位が最大の 2.249 s の  $m_1$  に対する各質点の感度を Fig. 6 に示す。これより、感度が最も高い点は  $m_2$  であることがわかる。よって、最大応答点付近の振動を下げるために最適な構造変更箇所は  $m_2$  であり、感度が正の値なので変位を下げるためには質量を減少させればよいことがわかる。

### 3.2.3 感度妥当性の検証

3.2.2 項で  $m_2$  が  $m_1$  の振動低減に対して感度が最大であることが判明した。ここで、 $m_2$  が最適な構造変更点であることを示すために、 $m_1$ 、 $m_2$  の各質点の質量を個別に 10% ずつ減少させる。それぞれ質量を変更し、初期状態の質量行列に換えてそれぞれ再度応答計算に使用する。質量行列以外の入力特性等の解析条件は 3.2.1 項と同じである。

Fig. 5 に  $m_1$ 、 $m_2$  の構造変更後の変位応答を示す。Fig. 7 に最大応答点におけるデフォルトからの減少量を示す。Fig. 7 より、 $m_2$  の質量を変更した場合、対象の振幅が最も低減しており、最適な変更箇所であることがわかる。また、Fig. 6 の感度の予測と Fig. 7 の振幅の減少量との傾向が一致している。以上より、本手法の妥当性が確認される。

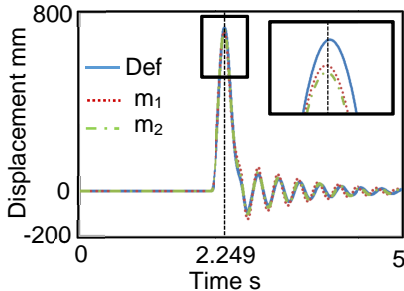


Fig.5 Comparison of displacement of  $m_1$

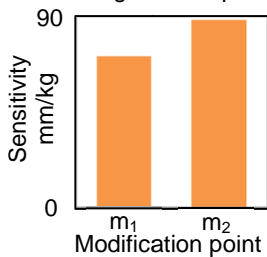


Fig.6 Sensitivity of two points at 2.249 s

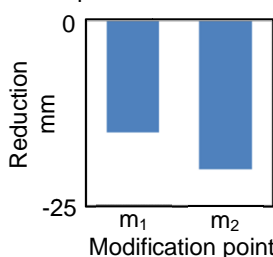


Fig.7 Comparison of reduction at 2.249 s

### 3.3 大変位による非線形性を考慮した時間軸感度解析

3.2.3 項により、時間軸感度解析の妥当性が確認された。しかし、2 章で示したように大きな変位を伴う振動の場合、構造物自体の振動特性の変化を考慮する必要がある。そこで本項では変位に応じて剛性・減衰を変更することにより、大変位によっておこる振動特性の変化を疑似的に再現し、感度解析を行う。

#### 3.3.1 解析条件

Fig. 2 よりサスペンションの姿勢が上がるにつれて固有振動数は低下しており、共振点の振幅は上昇している。これを構造パラメータ上で考えると剛性値は低下し、減衰値は上昇

することが考えられる。そこで本項では、Fig. 8 のように変位-剛性・減衰曲線を作成し、式 (2) の変位感度を計算する際に逐次その変位に対応する剛性・減衰値を算出する。算出された剛性値・減衰値を用いて、式 (1) と式 (2) から変位と感度を算出する。

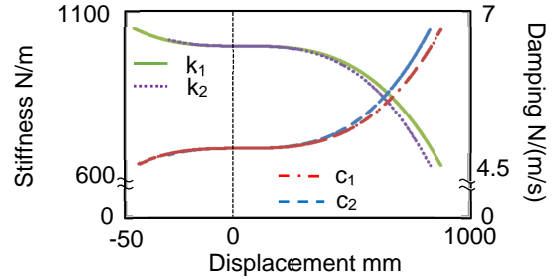


Fig.8 Relation of displacement-stiffness and damping

### 3.3.2 解析結果

Newmark 法によって計算された  $m_1$  の変位応答波形を Fig. 9 のデフォルト (Def) に示す。また、変位が最大の 2.315 s の  $m_1$  に対する各質点の感度を Fig. 10 に示す。これより、感度が最も高い点は  $m_1$  であることがわかる。よって、最大応答点付近の振動を下げるために最適な構造変更箇所は 3.2.2 項とは異なり、 $m_1$  であり、感度が正の値なので変位を下げるためには質量を減少させればよいことがわかる。

### 3.3.3 感度妥当性の検証

3.3.2 項で  $m_1$  が  $m_1$  の振動低減に対して感度が最大であると判明した。ここで、 $m_1$  が最適な構造変更点であることを示すために、 $m_1$ 、 $m_2$  の各質点の質量を個別に 10% ずつ減少させる。それぞれ質量を変更し、初期状態の質量行列に換えてそれぞれ再度応答計算に使用する。質量行列以外の入力特性等の解析条件は 3.3.1 項と同じである。

Fig. 9 に  $m_1$ 、 $m_2$  の構造変更後の変位応答を示す。Fig. 11 に最大応答点におけるデフォルトからの減少量を示す。Fig. 11 より、 $m_2$  の質量を変更した場合、対象の振幅を最も低減しており、最適な変更箇所であることがわかる。以上より、剛性・減衰値を変化させながら時間軸感度解析を行った場合と剛性・減衰値を一定値のまま時間軸感度解析を行った場合は感度が異なる可能性があるため、大変位を伴う場合、振動特性の変化を考慮して感度解析を行う必要性を確認した。

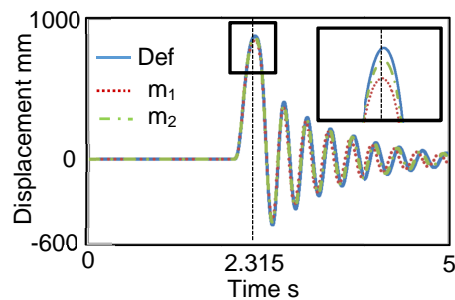


Fig.9 Comparison of displacement of  $m_1$

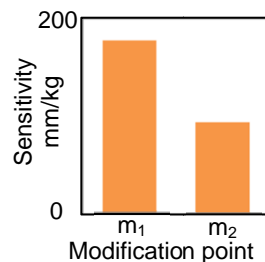


Fig.10 Sensitivity of two points at 2.315 s

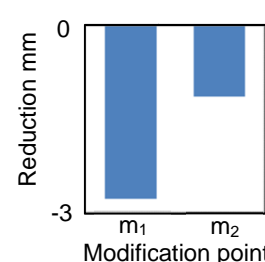


Fig.11 Comparison of reduction at 2.315 s

## 4. 簡易モデルにおける時間軸感度解析

本章では、サスペンションの簡易モデルを用い、剛性・減衰のパラメータを変更した場合としない場合での時間軸感度解析を行い、最大応答点での感度の比較を行う。

### 4.1 剛性・減衰一定時における時間軸感度解析

#### 4.1.1 解析条件

解析対象は Fig. 12 のような 4 隅がピンで固定されたサスペンションの簡易モデルとする。Fig. 13 に簡易モデルのばねマスモデルを示す。質量行列は各部材の質量を測定して、作成する。剛性、減衰行列は Position 1 の姿勢の簡易モデルをハンマリング試験で FRF を計測し、そこからそれぞれの値を推定する。推定された剛性値、減衰値から再合成した FRF と実測値の FRF の比較を Fig. 14 に示す。剛性値・減衰値は初期値のまま常に一定で解析を行う。また、Table 2 に解析に用いた各パラメータを示す。入力は 1.5 Hz のハーフサイン波を用い、入力点は  $m_1$  とする。

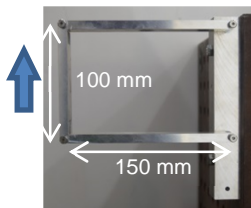


Fig.12 Simple model(Position 1)

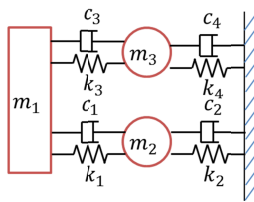


Fig.13 Calculation model

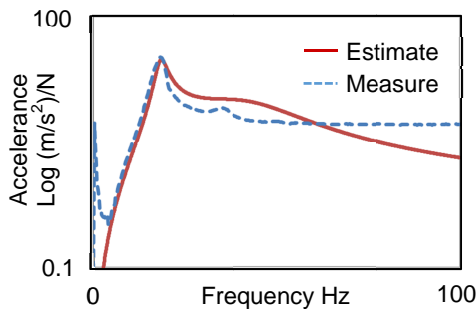


Fig.14 Comparison of FRF(Position 1)

Table 2 Values of each structural parameter (Position 1)

Mass Number	Mass Value [g]	Spring Number	Stiffness Value [N/m]	Damping Number	Damping Value [N/(m/s)]
$m_1$	60.67	$k_1$	$1.492 \times 10^3$	$c_1$	4
$m_2$	72.02	$k_2$	$1.492 \times 10^3$	$c_2$	2
$m_3$	72.02	$k_3$	$1.492 \times 10^3$	$c_3$	4
		$k_4$	$1.492 \times 10^3$	$c_4$	2

#### 4.1.2 解析結果

Newmark 法によって計算された  $m_1$  の変位応答波形を Fig. 15 のデフォルト (Def) に示す。また、変位が最大の 2.158 s の  $m_1$  に対する各質点の感度を Fig. 16 に示す。これより、感度が最も高い点は  $m_1$  であることがわかる。よって、最大応答点付近の振動を下げるために最適な構造変更箇所は  $m_1$  であり、感度が正の値なので変位を下げるためには質量を減少させればよいことがわかる。

#### 4.1.3 感度妥当性の検証

4.1.2 項で  $m_1$  が  $m_1$  の振動低減に対して感度が最大であることが判明した。ここで、 $m_1$  が最適な構造変更点であることを示すために、 $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$  の各質点の質量を個別に減少させる。変更量は  $m_1$  の質量の 10% (6.067 g) とする。変更された質量を初期状態の質量行列に換え、それぞれ再度応答計算を使用する。質量行列以外の入力特性等の解析条件は 4.1.1 項と同じである。

Fig. 15 の  $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$  に構造変更後の変位応答を示す。Fig. 17 に最大応答点におけるデフォルトからの減少量を示す。Fig. 17 より、 $m_1$  の質量を変更した場合、対象の振幅を最も低減しており、最適な変更箇所であることがわかる。

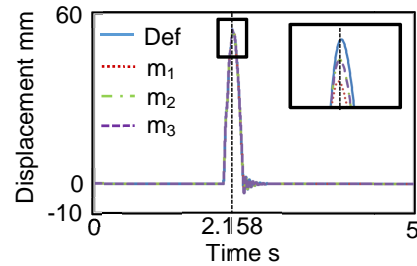


Fig.15 Comparison of displacement of  $m_1$

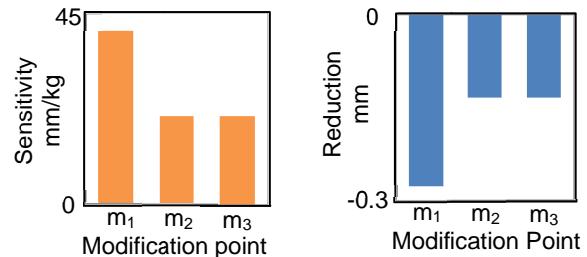


Fig.16 Sensitivity of each points at 2.158 s

Fig.17 Comparison of reduction at 2.158 s

### 4.2 剛性・減衰変化時の時間軸感度解析

#### 4.2.1 解析条件

簡易モデルの先端を Position 1 から Position 4 まで 25 mm ずつ上昇させ、それぞれの姿勢での剛性値・減衰値の推定を 4.1.1 項と同様に行う。Position 4 での推定された剛性値・減衰値から再合成した FRF と実測値の FRF の比較を Fig. 18 に示す。得られた変位と剛性・減衰の関係から最小二乗法を用いて補完し、Fig. 19 に示すような変位-剛性曲線、変位-減衰曲線を作成する。これらの曲線を Newmark 法で応答計算する際と時間軸感度を算出する際に用い、疑似的に大変位による剛性・減衰の変化を再現する。入力など他の条件は 4.1.1 項と同様である。また、Table 3 に 75 mm 上昇した Position 4 時の各パラメータを示す。

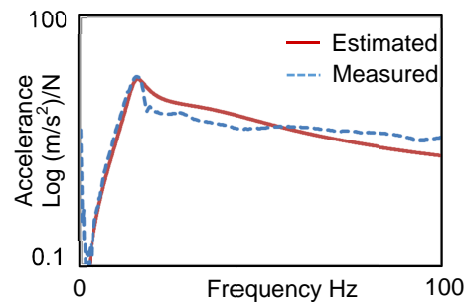


Fig.18 Comparison of FRF(Position 4)

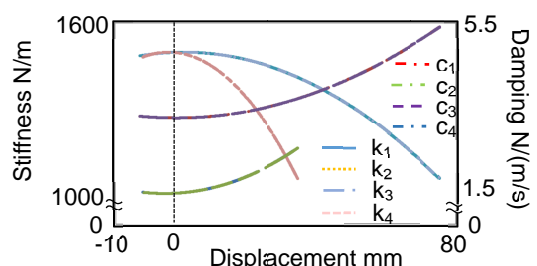


Fig.19 Relation of displacement-stiffness and damping

Table 3 Values of each structural parameter (Position 4)

Mass Number	Mass Value [g]	Spring Number	Stiffness Value [N/m]	Damping Number	Damping Value [N/(m/s)]
$m_1$	60.67	$k_1$	$1.042 \times 10^3$	$c_1$	5.4
$m_2$	72.02	$k_2$	$1.042 \times 10^3$	$c_2$	2.7
$m_3$	72.02	$k_3$	$1.042 \times 10^3$	$c_3$	5.4
		$k_4$	$1.042 \times 10^3$	$c_4$	2.7

#### 4.2.2 解析結果

Newmark法によって計算された $m_1$ の変位応答波形をFig. 20のデフォルト(Def)に示す。また、変位が最大の2.198 sの $m_1$ に対する各質点の感度をFig. 21に示す。これより、感度が最も高い点は $m_2$ と $m_3$ であることがわかる。よって、最大応答点付近の振動を下げるために最適な構造変更箇所は $m_2$ または $m_3$ であり、感度が負の値なので変位を下げるためには質量を増加させればよいことがわかる。

#### 4.2.3 感度妥当性の検証

4.2.2項で $m_2$ または $m_3$ が $m_1$ の振動低減に対して感度が最大であると判明した。ここで、 $m_2$ または $m_3$ が最適な構造変更点であることを示すために、各質点の質量を個別に増加させる。変更量は4.1.3項と同じである。それぞれ質量を変更し、初期状態の質量行列に換えて、再度応答計算に使用する。質量行列以外の入力特性等の解析条件は4.2.1項と同じである。

Fig. 20に $m_1, m_2, m_3$ の構造変更後の変位応答を示す。Fig. 22に最大応答点におけるデフォルトからの減少量を示す。Fig. 22より、 $m_2$ または $m_3$ の質量を変更した場合、対象の振幅が最も低減しており、最適な変更箇所であることがわかる。

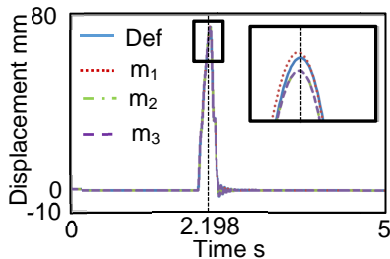


Fig.20 Comparison of displacement of  $m_1$

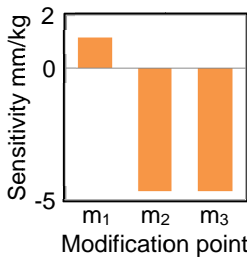


Fig.21 Sensitivity of each points at 2.198 s

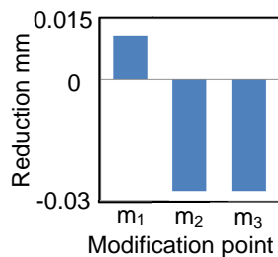


Fig.22 Comparison of reduction at 2.198 s

### 5. 簡易モデルを用いた実験による時間軸感度解析の検証

前章で確認された結果を踏まえ、実際に簡易モデルを大変位させ効果を検証する。

#### 5.1 実験条件

Fig. 23のような変位拡大機構を作成し、加振器からの変位を拡大する。入力条件は解析で使用した波形と同様の波形を使用する。前章と同量の質量付加を各点にそれぞれ行い、質量付加する前との変位を比較する。

#### 5.2 実験結果

Fig. 24にデフォルトの波形と各質点にそれぞれ質量負荷を

行った後の応答波形を示す。Fig. 25に最大応答点におけるデフォルトとの差を示す。Fig. 25より、前章の結果のFig. 22と同様の傾向を示している。よって、大変位によって起こる剛性・減衰値の変化を考慮した時間軸感度解析を用いることにより、変位感度の精度向上につながることを示した。

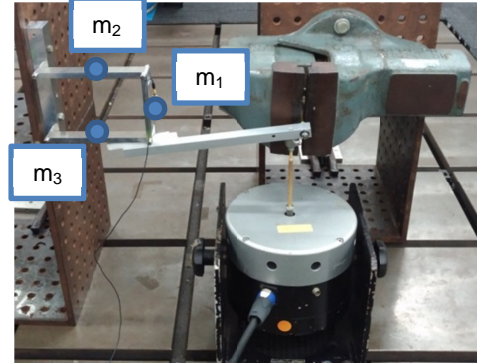


Fig.23 Experiment set up

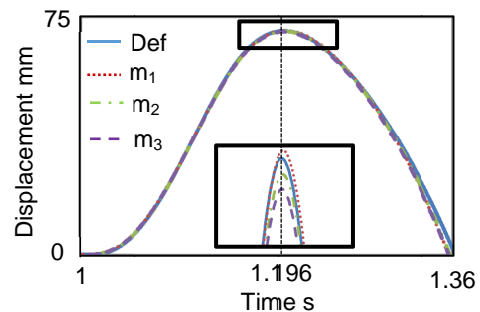


Fig.24 Comparison of displacement of  $m_1$

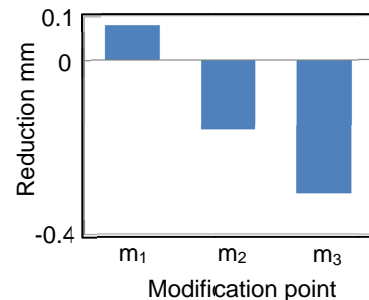


Fig.25 Comparison of reduction at 1.196s

### 6. 研究成果

- (1) 自動車のサスペンションの姿勢を変えることにより、構造全体の剛性や減衰が変化することを確認した。
- (2) 計算モデルにおいて時間軸感度解析の妥当性を確認した。
- (3) 大変位による剛性値と減衰値の変化を考慮した時間軸感度解析を行った場合と変化を考慮せずに時間軸感度解析を行った場合で最も感度が高い点が異なることを示し、簡易モデルを用いた実験により効果を検証した。

#### 参考文献

- (1) 吉村允孝, 機械構造物の振動特性に関する設計感度解析, 日本機械学会論文集(C編), 50-449 (1984), pp. 37-43
- (2) 長松昭男, “モード解析入門”, コロナ社, (1993)
- (3) Singiresu S. Rao, Mechanical Vibrations, Prentice Hall, (2010), pp. 968-970
- (4) 大久保信行, “機械のモーダル・アナリシス”, 中央大学出版部, (1982)